Exercice 1:

1. Oui.
2. Non, la fonction $x \mapsto x^3 - x$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ donc il n'y a pas de stabilité par addition.
3. Si $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$ alors $(f+g)(0) = 2 \neq 1$ donc il n'y a pas de stabilité par addition.
4. Oui.
5. Oui.
6. Oui.
7. Oui, par linéarité de l'intégrale.
8. Oui.
9. Oui.
10. Non, $\underbrace{(1,0)}_{\in F} + \underbrace{(0,1)}_{\in F} = (1,1) \notin F$.
11. Non, $\underbrace{(1,0)}_{\in F} + \underbrace{(0,1)}_{\in F} = (1,1) \notin F$.
12. Non, $\underbrace{(2,2)}_{\in F} + \underbrace{(-1,-3)}_{\in F} = (1,-1) \notin F$.
13. Non, pas de stabilité par multiplication par un scalaire négatif.
14. Oui.

Exercice 2:

1. $F = \text{Vect}(1, X, X^3)$.
2. $F = \text{Vect}\,(\text{ch}, \text{sh})$.
3. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+t = 0 \text{ et } 2y+4z-4t = 0\right\} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+t = 0 \text{ et } y = -2z+2t\right\}$.
   D'où $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = 2z-3t \text{ et } y = -2z+2t\right\} = \text{Vect}\,((2,-2,1,0),(-3,2,0,1))$.

Exercice 3: Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On peut l'écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
$P \in H \Leftrightarrow P(1) = a+b+c+d = 0 \Leftrightarrow P = a(X^3-1) + b(X^2-1) + c(X-1)$.
On a donc $H = \text{Vect}(X^3-1, X^2-1, X-1)$.

Exercice 4: Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Le sens retour de l'équivalence est trivial car dans ce cas $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$.
Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$ et $y \in G$ tel que $y \notin F$.
Comme $F \cup G$ est stable par combinaison linéaire, $x + y \in F \cup G$.
Si $x+y \in F$ alors $\underbrace{x+y}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F} = y \in F$. Absurde.
Si $x+y \in G$ alors $\underbrace{x+y}_{\in G} - \underbrace{y}_{\in G} = x \in G$. Absurde.
Donc $F \subset G$ ou $F \supset G$.
Conclusion : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $F \supset G$

Exercice 5: Soit u et v deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\text{Vect}(u) \subset \text{Vect}(u,v)$, $\text{Vect}(u,\lambda.u)$=$\text{Vect}(u)$ et $\text{Vect}(u, v+\lambda.u)$=$\text{Vect}(u,v)$

Exercice 6: Soit A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

1. $A\cap B \subset A$ donc $\text{Vect}(A\cap B) \subset \text{Vect}(A)$. De même, $A\cap B \subset B$ donc $\text{Vect}(A\cap B) \subset \text{Vect}(B)$.
   Ainsi, $\text{Vect}(A\cap B) \subset \text{Vect}(A)\cap\text{Vect}(B)$.
   Par contre, l'inclusion dans l'autre sens n'est donc pas toujours vraie.
   En effet, prenons $A = \{(1,0)\}$ et $B = \{(2,0)\}$.
   On a $A\cap B = \varnothing$ d'où $\text{Vect}(A\cap B) = \{0_E\}$. Or $\text{Vect}(A)\cap\text{Vect}(B) = \text{Vect}((1,0))$.
2. On a $\text{Vect}(A)+\text{Vect}(B) = \text{Vect}\left(\text{Vect}(A)\cup\text{Vect}(B)\right) = \text{Vect}(A\cup B)$.
   Or $A \subset A\cup B$ donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(A\cup B)$. De même, $B\subset A\cup B$ donc $\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A\cup B)$.
   De plus, $\text{Vect}(A\cup B)$ est stable par somme d'où $\text{Vect}(A)+\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A\cup B)$.

   On a $A\subset \text{Vect}(A)$ donc $A \subset \text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$. De même, $B\subset\text{Vect}(B)$ donc $B\subset \text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$ donc $A\cup B \subset \text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$. Or, $\text{Vect}(A\cup B)$ est le plus petit espace vectoriel qui contient $A\cup B$ donc $\text{Vect}(A\cup B) \subset \text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$.
   D'où $\text{Vect}(A\cup B) = \text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$.

Exercice 7: On a $f_1 = \cos + i\sin$ et $f_2 = \cos - i\sin$, donc f_1 et f_2 sont inclus dans $\text{Vect}(\cos,\sin)$,
d'où $\text{Vect}(f_1,f_2) \subset \text{Vect}(\cos,\sin)$.
De même, $\cos = \frac{1}{2}(f_1+f_2)$ et $\sin = \frac{1}{2i}(f_1-f_2)$, d'où $\text{Vect}(\cos,\sin) \subset \text{Vect}(f_1,f_2)$.
Conclusion : $\text{Vect}(f_1,f_2) = \text{Vect}(\cos,\sin)$.

Exercice 8: Soit F un sev du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}$.
1er cas : $F = \{0_{\mathbb{K}}\}$.
2eme cas : $F \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$, donc il existe $v\in F$ tel que $v\neq 0_{\mathbb{K}}$ (donc v admet un inverse dans $\mathbb{K}$ car $\mathbb{K}$ est un corps).
Soit $x\in\mathbb{K}$, alors $x = \underbrace{xv^{-1}}_{\in\mathbb{K}}\underbrace{v}_{\in F} \in F$. D'où $\mathbb{K}\subset F$ et donc $F=\mathbb{K}$.

Exercice 9:
$F = \text{Vect}\left((1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\right)$ et $G = \text{Vect}\left((0,0,1,0),(0,0,0,1)\right)$

$F+G = \text{Vect}\left((1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right)$ et donc $F+G\subset\mathbb{R}^4$.

Réciproquement, soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) = x(1,0,-1,0)+y(0,1,-1,0)+(z+x+y)(0,0,1,0)+t(0,0,0,1)$$

Donc, $(x,y,z,t)\in F+G$. On a bien $F+G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 10: Soit $P\in F\cap G$. P est de la forme $P = a(X+3)$. Alors, $P(1)+P(2) = 9a = 0$. Donc $a=0$.
On a donc $F\cap G = \{0\}$ donc F et G sont en somme directe.

Exercice 11:
Soit $H = \{(a-b,a,a-3b), a,b\in\mathbb{R}\}$ et $R = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y-z=0\right\}$.
$H\cap R = \left\{(a-b,a,a-3b)\,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}, a-b+a-(a-3b)=0\right\} = \left\{(a-b,a,a-3b)\,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}, a=-2b\right\}$.
D'où $H\cap R = \{(-3b,-2b,-5b), b\in\mathbb{R}\} = \text{Vect}(3,2,5)$, donc la somme $F+G$ n'est pas directe.

Exercice 12: Pour $F = \text{Vect}\left((1,0)\right)$, $G = \text{Vect}\left((0,1)\right)$ et $H = \text{Vect}\left((1,1)\right)$, on a $F\oplus G$, $F\oplus H$, $H\oplus G$ et $F+G+H$ non directe car $(1,1) = (1,0)+(0,1)$.

Exercice 13:

1. On a $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$, $(0,1,0) = (0,0,0) + (0,1,0)$ et $(0,0,1) = (0,0,0) + (0,0,1)$
2. Par stabilité par combinaison linéaire de $F+G$, On a $\text{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right) \subset F+G$.
   Or, $\text{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right) = E$. Donc, par double inclusion, $F+G = E$.

   Mais $(0,1,2) \in F \cap G$ donc la somme n'est pas directe.

Exercice 14:
Soit $f \in F \cap G$. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax+b$.
$f'(0) = a$ et $f(0) = b$. Or, $f \in F$ donc $a = b = 0$ donc $f = 0$.
On a donc $F \cap G = \{0\}$ et la somme $F+G$ est directe.

1. **Analyse :** soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $(h,g) \in F \times G$ tel que $f = h+g$.
   Alors, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) &= h(x) + ax + b \\ f(0) &= h(0) + b = b \\ f'(0) &= h'(0) + a = a \end{aligned}$$
   On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f'(0)x + f(0)$ et $h(x) = f(x) - f'(0)x - f(0)$.
2. **Synthèse :** soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f'(0)x + f(0)$ et $h(x) = f(x) - f'(0)x - f(0)$. On a bien
$$\begin{aligned} f &= g+h \\ g &\in G \\ h &\in F \end{aligned}$$
   Donc, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F+G$.

Finalement, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 15:
Montrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
- F est non-vide (la fonction nulle appartient à F).
- Soit $f,g \in F$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_{-1}^{1} f(t) + \lambda g(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t + \lambda \int_{-1}^{1} g(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Donc $f + \lambda g \in F$.
Par la caractérisation, F est un sev de E.
- G est non-vide (la fonction nulle appartient à G).
- Soit $f,g \in G$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est une fonction constante. Donc $f + \lambda g \in G$.
Par la caractérisation, G est un sev de E.
Montrons tout d'abord que $F \oplus G$.
Soit $f \in F \cap G$, donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $f = c$. De plus, $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, d'où $2c = 0$, donc $f = c = 0$. On a donc $F \cap G = \{0_E\}$ d'où $F \oplus G$.
Montrons à présent que $F+G = E$.
Soit $f \in E$, $f = \underbrace{f - \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t}_{\in F} + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t}_{\in G}$. Donc $F+G = E$.
Conclusion : $F \oplus G = E$.

Exercice 16: Soient l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
$F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$ et $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}$.

On a $F \cap G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1} = 0\} = \{0_E\}$.
De plus, pour tout $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, posons $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{2n} = 0 \quad ; \quad v_{2n+1} = u_{2n+1} - u_{2n} \quad ; \quad w_{2n} = u_{2n} \quad ; \quad w_{2n+1} = u_{2n}\,.$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$, $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$.
Donc F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 17: Notons v_1, v_2 et v_3 les vecteurs correspondants pour chaque item.

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$.

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,2,2) = (0,0,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right.$$

   La famille (v_1, v_2) est libre.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$.

$$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

   La famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$.

$$\lambda_1(1,2,1) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(1,-1,-2) = (0,0,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

   Le système a une infinité de solution donc la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre.
   On a, par exemple, $v_1 - v_2 + v_3 = 0$.

4. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$.

$$\lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(2,-1,3) + \lambda_3(-1,1,-1) = (0,0,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right.$$

   Le système a une infinité de solution donc la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre.
   On a, par exemple, $v_1 - v_3 = 0$.

Exercice 18: Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0; 2\pi],\ \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 x \cos(x) + \lambda_3 \sin(x) + \lambda_4 x \sin(x) = 0$$

On doit alors obtenir 4 équations mettant en jeu les quatre coefficients.

$$\left\{\begin{array}{l} (x=0)\ \ \lambda_1 = 0 \\ (x=2\pi)\ \ \lambda_1 + \lambda_2.2\pi = 0 \\ (x=\frac{\pi}{2})\ \ \lambda_3 + \lambda_4.\frac{\pi}{2} = 0 \\ (x=\frac{3\pi}{2})\ \ -\lambda_3 + \lambda_4.\frac{3\pi}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_4.\frac{\pi}{2} \\ \lambda_3 = \lambda_4.\frac{3\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}\right.$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

<u>Exercice</u> <u>19</u>: Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X^{k+1} - X^k) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k = 0 \Rightarrow \lambda_n X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) X^k - \lambda_0 = 0$$

Or, le seul polynôme est celui dont tous les coefficients sont nuls donc

$$\begin{cases} \lambda_n = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_{k-1} = \lambda_k \\ \lambda_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall k \in [0, n+1],\ \lambda_k = 0$$

La famille $(P_0, ..., P_n)$ est libre. On peut également utiliser la proposition sur les polynômes échelonnés.

<u>Exercice</u> <u>20</u>: Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Soit $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} P = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3 &\iff a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = b_1(X^2+1) + b_2(X^2+X-1) + b_3(X^2+X) \\ &\iff a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = b_1 - b_2 + (b_2+b_3)X + (b_1+b_2+b_3)X^2 \\ &\iff \begin{cases} a_0 = b_1 - b_2 \\ a_1 = b_2 + b_3 \\ a_2 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b_1 = a_2 - a_1 \\ b_2 = a_2 - a_1 - a_0 \\ b_3 = 2a_1 + a_0 - a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe donc une unique décomposition de $P \in \mathbb{R}_2[X]$ comme combinaison linéaire de la famille (P_1, P_2, P_3). La famille (P_1, P_2, P_3) est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Les nouvelles coordonnées de $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ dans cette bases sont $a_2 - a_1$, $a_2 - a_1 - a_0$ et $2a_1 + a_0 - a_2$.

<u>Exercice</u> <u>21</u>: Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$.
On a $E \subset \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{K})$. De plus, la fonction nulle est un élément de E.
Par stabilité par combinaison linéaire des fonctions affines et de la continuité en 0, E est stable par combinaison linéaire. E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{K})$.
Posons $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1, 0] \\ x \text{ si } x \in]0, 1] \end{cases}$, $g : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in [-1, 0] \\ 0 \text{ si } x \in]0, 1] \end{cases}$ et $h : x \mapsto 1$.
La famille (f, g, h) est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.